به نام خدا

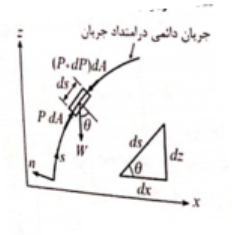
مکانیک سیالات

طاهره کاظمی

معادله برنولی و ماشین‌های هیدرولیکی

معادله برنولی:

یک جریان دائمی و غیرلزج



$$gz + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} = const$$

این رابطه معادله اولر نامیده می شود.

درصورت تراکم ناپذیر بودن جریان:

$$gz + \frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} = const \qquad \text{یا} \qquad H = z + \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} = const$$

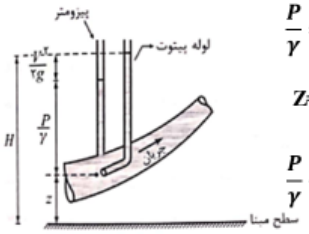
معادله برنولی است که برای جریان دائمی، غیرلزج و تراکم ناپذیر سیال در امتداد یک خط جریان کاربرد دارد.

H = انرژی کل در واحد وزن مایع یا هد کل

Z = انرژی پتانسیل در واحد وزن مایع که به آن ارتفاع هندسی می‌گویند. (هد ارتفاع)

$\frac{V^2}{2g}$ = انرژی جنبشی در واحد وزن مایع که ارتفاع نظیر سرعت نامیده می‌شود. (هد سرعت)

$\frac{P}{\gamma}$ = انرژی جریان (انرژی فشاری) در واحد وزن مایع که به آن ارتفاع نظیر فشار می‌گویند. (هد فشار)



$\frac{P}{\gamma}$ = ارتفاع ستون مایع در پیزومتر، ارتفاع نظیر فشار یا بار فشار

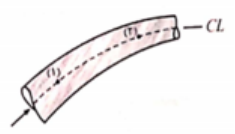
Z= فاصله تا سطح مبنا، ارتفاع هندسی یا بار ارتفاع

$\frac{P}{\gamma} + Z$ = (نشان دهنده فاصله سطح مایع در پیزومتر تا سطح مبنا)ارتفاع نظیر انرژی هیدرولیکی

اگر بخواهیم ارتفاع نظیر انرژی کل (H) را مشاهده کنیم، کافی است تا در مسیر جریان یک لوله پیتوت (پیتو) قرار دهیم. در این حالت فاصله سطح مایع در لوله پیتوت تا سطح مبنا، ارتفاع نظیر انرژی کل را مشخص می‌کند. ویژگی لوله پیتوت آن است که سرعت در دهانه ورودی آن صفر است، از این رو تمام بار سرعت در این نقطه از بین رفته و به بار فشار تبدیل می گردد. حالا با وجود لوله پیتوت، فشار جدید ما افزایش یافته است. این مقدار افزایش یافته که در واقع نشان دهنده بار سرعت است، "فشار دینامیک" نامیده می شود. این درحالی است که فشار قبلی در پیزومتر "فشار استاتیک" است و مجموع این دو فشار یعنی ارتفاع ستون مایع در لوله پیتوت "فشار ستون" نام دارد.

مانند شکل روبرو می توان محور مرکزی لوله جریان (**Centerline**) را به عنوان خط جریان در نظر گرفته و معادله برنولی را بر روی نقاط واقع بر آن بنویسیم.

معادله برنولی بین دو نقطه:



$$z_1+\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}$$

نکته: اگر جریان غیرچرخشی باشد، لزومی ندار که دو نقطه مورد نظر در معادله برنولی روی یک خط جریان قرار گیرند.

در حل مسائل با معادله برنولی به نکات زیر توجه کنین:

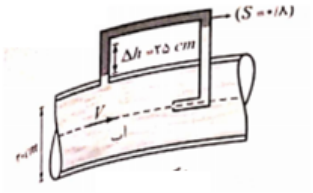
۱-اگر انتخاب سطح مبنا اختیاری است، سطح مبنا را به گونه ای انتخاب شود تا نقطه پایین تر ب روی آن قرار گیرد تا Z آن صفر شود. و Z نقطه بالاتر اختلاف ارتفاع دو نقطه شود. (اگر جریان افقی بود نیازی به نوشتن Z نیست.)

۲- اگر سطح مقطع لوله جریان ثابت باشد، با توجه به معادله پیوستگی، سرعت جریان در کلیه مقاطع یکسان خواهد بود. در این حالت به هنگام نوشتن معادله برنولی نیازی به نوشتن ترم سرعت نیست.

۳- فشار در مجاورت هوای آزاد (اتمسفر) را صفر در نظر می گیریم. مگر اینکه بخواهیم معادله برنولی بین دو نقطه را بر اساس فشار مطلق بنویسیم. در این حالت فشار در مجاورت هوای آزاد، فشار مطلق اتمسفر محلی خواهد بود.

۴- در مخازن بزرگ که پایین آمدن سطح مایع به هنگام تخلیه آن محسوس نیست، سرعت روی سطح آزد مایع و نقاط داخل مخزن، صفر در نظر گرفته می شود.

مثال ۲- سرعت جریان آب در لوله نشان داده شده در شکل مقابل چقدر است؟



نقاط ۱ و ۲ را روی محور مرکزی لوله و به ترتیب در زیر مانومتر و در دهانه ورودی لوله پیتوت در نظر می گیریم و معادله برنولی را می نویسیم:

چون دو نقطه هم تراز هستند و روی سطح مبنا قرار گرفته اند: $Z_1 = Z_2 = 0$

$$Z_1+\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}=Z_2+\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma} \longrightarrow 0+\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma w}=0+0+\frac{P_2}{\gamma w} \longrightarrow \frac{P_2-P_1}{\gamma_w}=\frac{V_1^2}{2g}$$

با استفاده از رابطه مانومتری داریم:

$$P_1-x\gamma_w-\Delta h\gamma_0+(\Delta h+x)\gamma_w=P_2 \longrightarrow \frac{P_2-P_1}{\gamma}=\Delta h\left(1-\frac{\gamma_0}{\gamma_w}\right)$$

در نهایت با مقایسه دو رابطه داریم:

$$V=\sqrt{2g\Delta h(1-\frac{\gamma_0}{\gamma_w})}=\sqrt{2\times 10\times 0.25\times(1-0.8)}=1\frac{m}{s}$$

نکته : هر یک از شرایط حاکم بر معادله برنولی را می توان در حالت های خاص لغو کرده و بدون آنها معادله برنولی را به کار برد. این حالت های خاص شامل موارد زیر است:

۱- لغو شرط تراکم ناپذیری جریان:

در این حالت معادله برنولی با استفاده از جرم مخصوص متوسط به کار می رود:

$$H = z + \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma} \longrightarrow \gamma H = \gamma z + \gamma\left(\frac{V^2}{2g}\right) + \gamma\left(\frac{P}{\gamma}\right) \longrightarrow P_{total} = \frac{1}{2}\rho V^2 + P$$

P_{total} = فشار کل گاز

P = فشار استاتیک (فشار ترمودینامیک)

$\frac{1}{2}\rho V^2$ = فشار دینامیک

در جریان دائمی غیرلزج گاز در شرایط گفته شده، معادله برنولی بین دو نقطه از یک خط جریان، به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + P_2$$

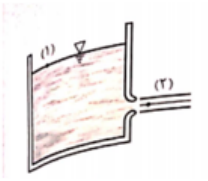
۲- لغو شرط بی اصطکاک بودن (غیرلزج بودن) جریان:

اگر سیال غیرلزج نباشد و اصطکاک داشته باشیم (سیال واقعی)، در آن صورت در طول جریان با افت انرژی مواجه می شویم. در این حالت معادله برنولی بین دو نقطه به شکل زیر می باشد:

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{(1-2)} \longrightarrow z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \Delta H_{(1-2)}$$

در رابطه بالا $\Delta H_{(1-2)}$ مقدار افت انرژی جریان را بین دو نقطه نشان می دهد.

۳- لغو شرط قرارگیری دو نقطه روی یک خط جریان:



در حالتی که تمام خطوط جریان از یک مخزن شروع شده باشند که انرژی در تمام نقاط آن یکسان باشد، در آن صورت می توان نقطه اولیه را در معادله برنولی، در هرکجای مخزن که خواستیم انتخاب کنیم. به عبارت دیگر لزومی ندارد که هر دو نقطه روی یک خط جریان قرار داشته باشند.

۴- لغو شرط دائمی بودن جریان:

برای جریان غیردائمی، در مواردی که تغییرات تدریجی باشد (مانند تخلیه یک مخزن)، می توانیم معادله برنولی را به کار ببریم بدون آن که خطای زیادی ایجاد شود.

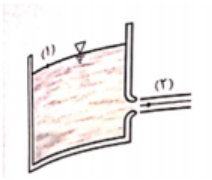
۲- لغو شرط بی اصطکاک بودن (غیرلزج بودن) جریان:

اگر سیال غیرلزج نباشد و اصطکاک داشته باشیم (سیال واقعی)، در آن صورت در طول جریان با افت انرژی مواجه می شویم. در این حالت معادله برنولی بین دو نقطه به شکل زیر می باشد:

$$H_1 = H_2 + \Delta H_{(1-2)} \longrightarrow \boxed{z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \Delta H_{(1-2)}}$$

در رابطه بالا $\Delta H_{(1-2)}$ مقدار افت انرژی جریان را بین دو نقطه نشان می دهد.

۳- لغو شرط قرارگیری دو نقطه روی یک خط جریان:



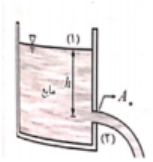
در حالتی که تمام خطوط جریان از یک مخزن شروع شده باشند که انرژی در تمام نقاط آن یکسان باشد، در آن صورت می توان نقطه اولیه را در معادله برنولی، در هرکجای مخزن که خواستیم انتخاب کنیم. به عبارت دیگر لزومی ندارد که هر دو نقطه روی یک خط جریان قرار داشته باشند.

۴- لغو شرط دائمی بودن جریان:

برای جریان غیردائمی، در مواردی که تغییرات تدریجی باشد (مانند تخلیه یک مخزن)، می توانیم معادله برنولی را به کار ببریم بدون آن که خطای زیادی ایجاد شود.

نکته:

با توجه به شکل روبرو داریم:



$$H_1 = H_2 \longrightarrow 0 + 0 + h = 0 + \frac{V^2}{2g} + 0 \longrightarrow V = \sqrt{2gh}$$

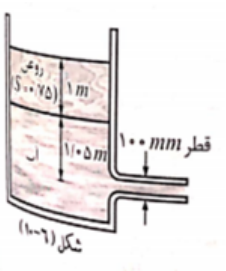
رابطه بالا، رابطه توریچلی نام دارد و برای محاسبه سرعت جت خروجی از یک مخزن استفاده می شود.

دبی خروجی نیز از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$Q = VA_0$$

که با جایگذاری سرعت در رابطه دوم داریم:

$$Q = A_0\sqrt{2gh}$$



شکل (۶-۱۰)

مثال ۳- دبی آب خروجی از مخزن شکل مقابل را به دست آورید. از تلفات صرف نظر کنید و مخزن را بزرگ در نظر بگیرید.

نقطه ۱ را روی سطح آب و نقطه ۲ را در خروجی لوله انتخاب می کنیم:

$$P_1 = (0.75 \times \gamma_w) \times 1 = 0.75\gamma_w \quad , \quad P_2=0$$

چون مخزن بزرگ است سرعت پایین آمدن آب و روغن ناچیز است و می توان گفت : $V_1 = 0$

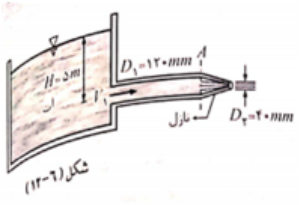
سطح افقی گذرنده از نقطه ۲ را به عنوان سطح مبنا در نظر می گیریم پس داریم: $Z_2=0$

معادله برولی را بین دو نقطه می نویسیم:

$$Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} \longrightarrow 1.05 + 0 + \frac{0.75\gamma_w}{\gamma_w} = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0 \longrightarrow V_2 = 6\ \mathrm{m/s}$$

و سپس دبی جریان را به دست می آوریم:

$$Q = VA \longrightarrow Q = 6\left(\pi \times \frac{0.1^2}{4}\right) = 15\pi \times 10^{-3}\frac{m^3}{s} = 15\pi\ lit/s$$



شکل (۶-۱۲)

مثال ۴- در شکل مقابل تلفات تا مقطع A به صورت $2.8\frac{V_1^2}{2g}$ و تلفات در نازل به صورت $0.2\frac{V_2^2}{2g}$ بیان می شود.

اگر ارتفاع H برابر ۵ متر باشد، دبی جریان و فشار در مقطع A را به دست آورید. $(\pi = 3)$

نقطه (۰) را در سطح آزاد آب، نقطه (۱) را در مرکز مقطع و نقطه (۲) را در خروجی نازل در نظر می گیریم.

فرض می کنیم مخزن بزرگ است و سرعت پایین آمدن آب برابر صفر است.

فرض می کنیم نقاط ۱ و ۲ روی سطح مبنا قرار دارند.

معادله برنولی را برای سیال واقعی می نویسیم چون در لوله و نازل افت انرژی داریم:

محاسبه دبی جریان:

$$Q_1 = Q_2 \longrightarrow V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 V_1 = \left(\frac{120}{40}\right)^2 V_1 = 9V_1$$

$$Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \Delta H(0-2) \quad , \quad \Delta H_{(0-2)} = 2.8\frac{V_1^2}{2g} + 0.2\frac{V_2^2}{2g}$$

$$5 + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{(9V_1)^2}{2g} + \left[2.8\frac{V_1^2}{2g} + 0.2\frac{V_2^2}{2g}\right] \longrightarrow V_1 = 1\frac{m}{s}$$

$$Q = V.A = (1)\left[\pi \times \frac{0.12^2}{4}\right] = 0.0108\frac{m^3}{s} = 10.8\frac{lit}{s}$$

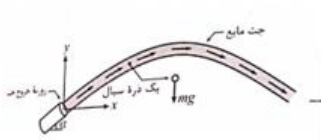
ب- محاسبه فشار در مقطع A:

$$Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + \Delta H(0-1) = Z_0 + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{P_0}{\gamma}$$

$$5 + 0 + 0 = 0 + \frac{P_A}{10} + \frac{1^2}{2\times10} + \frac{2.8\times1^2}{2\times10} \longrightarrow P_A = 48.1\ kPa$$

نکته:

در بررسی جریان جت مایع، می توانیم به جای معادله برنولی، حرکت یک ذره را مورد توجه قرار داده معادلات مربوط به حرکت پرتابه را به کار ببریم. در این حالت با استقرار محور مختصات در محل روزنه خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow V_x = (V_0)_x = V_0 \cos\alpha \Rightarrow x = V_0 t \cos\alpha$$

$$\sum F_y = -mg \Rightarrow V_y = -gt + (V_0)_y = -gt + V_0 t \sin\alpha \Rightarrow y = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0 t \sin\alpha$$

$$y = -\frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha$$

اگر خروجی جت از روزنه به صورت افقی باشد ($\alpha = 0$) داریم:

$$y = \frac{gx^2}{2V_0^2}$$

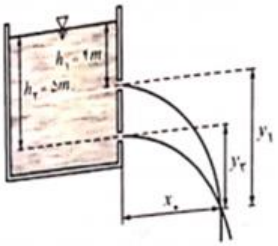
در حرکت جت داریم:

زمان اوج پرتابه:

$$t = \frac{V_0 \sin\alpha}{g}$$

ارتفاع اوج اولیه:

$$h = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$



مثال ۵ – سیالی مطابق شکل زیر از دو روزنه که با فواصل h1 و h2 بر روی دیواره یک مخزن بزرگ نصب شده اند. به صورت افقی به بیرون تخلیه می شود. اگر از تلفات انرژی صرف نظر شود، محل تلاقی جت های خروجی از این دو روزنه (x0) را به دست آورید.

مبدا مختصات را روی هر دو روزنه قرار می دهیم و سپس معادله مسیر حرکت جت خروجی از روزنه ها را می نویسیم:

الف- مبدا مختصات روی روزنه پایینی:

$$y_1 = -\frac{gx_0^2}{2V_{0(1)}^2} \quad , \quad V_{0(1)} = \sqrt{2gh_1} \Rightarrow y_1 = \frac{-x_0^2}{4h_1}$$

ب- محور مختصات روی روزنه بالایی:

$$y_2 = -\frac{gx_0^2}{2V_{0(2)}^2} \quad , \quad V_{0(2)} = \sqrt{2gh_2} \Rightarrow y_2 = \frac{-x_0^2}{4h_2}$$

با مقایسه الف و ب داریم:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\left(\frac{-x_0^2}{4h_2}\right)}{\left(\frac{-x_0^2}{4h_1}\right)} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \frac{h_1}{h_2}$$

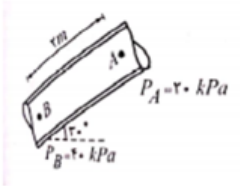
با توجه به شکل و روابط داریم:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = h_2 - h_1 = 5 - 4 = 1\ m \\ \frac{y_2}{y_1} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{5} = 0.8 \end{cases} \longrightarrow \quad y_1 = 5\ m \ , \ y_2 = 4\ m$$

با قرار دادن هریک از دو مقدار بالا در معادله مسیر حرکت جت، مقدار x0 محاسبه می شود:

$$y_1 = \frac{x_0^2}{4h_1} \Rightarrow 5 = \frac{x_0^2}{4\times 4} \Rightarrow x_0 = 4\sqrt{5}\ m$$

مثال ۶ – مایعی به وزن مخصوص ۸، مطابق شکل در لوله ای که با افق زاویه ۳۰ می سازد، با شدت ثابت در جریان است. اگر سطح مقطع لوله ثابت باشد، مطلوب است تعیین:



الف- جهت جریان در لوله

ب- تلفات (افت ارتفاع) بین دو نقطه A و B

ج- شیب خط تراز هیدرولیکی و گرادیان هیدرولیکی

د- شیب خط تراز انرژی و گرادیان انرژی

الف- با توجه به ثابت بودن سطح مقطع لوله، جهت جریان بر اساس انرژی هیدرولیکی تعیین خواد شد. در این حالت داریم:

انرژی هیدرولیکی در نقطه A:

$$\frac{P_A}{\gamma}+z_A=\frac{۲۰}{۸}+۲\times sin\,۳۰^\circ=۳/۵\ N.m/N$$

انرژی هیدرولیکی در نقطه B:

$$\frac{P_B}{\gamma}+z_B=\frac{۴۰}{۸}+۰=۵\ N.m/N$$

نقطه B روی سطح مبنا قرار دارد.

چون انرژی هیدرولیکی نقطه B بیشتر از نقطه A می باشد، بنابراین جهت جریان از B به سمت A خواهد بود

ب-

$$H_B=H_A+\Delta H_{AB}\longrightarrow z_B+\frac{P_B}{\gamma}+\frac{V_B^2}{۲g}=z_A+\frac{P_A}{\gamma}+\frac{V_A^2}{۲g}+\Delta H_{BA}$$

چون سطح مقطع لوله در تمام طول جریان ثابت است، سرعت جریان نیز باتوجه به معادله پیوستگی در کلیه مقاطع یکسان خواهد بود. در این حالت داریم:

$$0+\frac{40}{8}+\frac{V^2}{2g}=3\ sin30+\frac{20}{8}+\frac{V^2}{2g}+\Delta H_{BA}\longrightarrow \Delta H_{BA}=1.5\ N.m/N$$

ج-

$$\text{شیب خط تراز هیدرولیک}=\frac{(\frac{P}{\gamma}+z)_B-(\frac{P}{\gamma}+z)_A}{L\cos\theta}=\frac{۵-۳/۵}{۲\times cos\,۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{گرادیان هیدرولیک}=\frac{(\frac{P}{\gamma}+z)_B-(\frac{P}{\gamma}+z)_A}{L}=\frac{۵-۳/۵}{۲}=۰/۷۵$$

د-

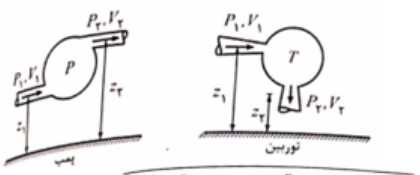
$$\text{شیب خط تراز انرژی}=\frac{\Delta H}{L\cos\theta}=\frac{(۰+\frac{۴۰}{۸}+\frac{V^۲}{۲g})-(۲\times sin\,۳۰^\circ+\frac{۲۰}{۸}+\frac{V^۲}{۲g})}{۲\times cos\,۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{گرادیان انرژی}=\frac{\Delta H}{L}=\frac{(۰+\frac{۴۰}{۸}+\frac{V^۲}{۲g})-(۲\times sin\,۳۰^\circ+\frac{۲۰}{۸}+\frac{V^۲}{۲g})}{۲}=۰/۷۵$$

ماشین های هیدرولیکی:

پمپ و توربین:

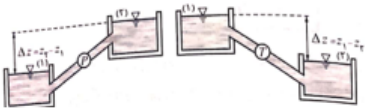
معادله برنولی به هنگام عبور جریان از درون پمپ یا توربین به صورت زیر است:



$$z_1+\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+\Delta H_{(1-2)}+H_n$$

نقاط ۱ و ۲ نقاط قرار گرفته در مسیر جریان، قبل و بعد از عبور سیال از ماشین آبی می باشند.

H_n، ارتفاع نظیر انرژی پمپ یا توربین است. اگر ماشین آبی توربین باشد، H_n با علامت مثبت به صورت $+H_T$ در طرف راست معادله قرار می گیرد. ولی اگر ماشین آبی پمپ باشد، H_n با علامت منفی و به صورت $-H_P$ در طرف راست معادله قرار می گیرد.



نکته : در حالت خاصی از عملکرد پمپ یا توربین که سیال از یک مخزن بزرگ به مخزن بزرگ دیگر انتقال می یابد داریم:

پمپ :

$$H_1+H_P=H_2+\Delta H_{(1-2)} \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1+H_p=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\Delta H_{(1-2)}$$

$$0+0+z_1+H_p=0+0+z_2+\Delta H_{(1-2)} \Rightarrow \boxed{H_p=\Delta z+\Delta H_{(1-2)}}$$

توربین:

$$H_1=H_2+\Delta H_{(1-2)}+H_T \Rightarrow \frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+z_1=\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\Delta H_{(1-2)}+H_T$$

$$0+0+z_1=0+0+z_2+\Delta H_{(1-2)}+H_T \Rightarrow \boxed{H_T=\Delta z-\Delta H_{(1-2)}}$$

توان پمپ و توربین:

توان هیدرولیکی: توان داده شده به جریان توسط پمپ یا توان گرفته شده از جرین توسط توربین

$$\text{توان}=\frac{\text{انرژی}}{\text{زمان}} \qquad N=\frac{H_n mg}{t}=H_n\times(\frac{m}{t})\times g$$

$$N=H_n\times\rho Q\times g \longrightarrow N_u=\gamma Q H_n$$

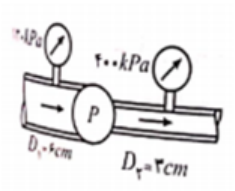
توان هیدرولیکی پمپ:

$$\text{راندمان پمپ}=\frac{\text{توان هیدرولیکی}}{\text{توان حقیقی}} \longrightarrow \boxed{\eta_p=\frac{N_u}{N_a}}$$

توان هیدرولیکی توربین:

$$\text{راندمان توربین}=\frac{\text{توان حقیقی}}{\text{توان هیدرولیکی}} \longrightarrow \boxed{\eta_T=\frac{N_a}{N_u}}$$

تمرین ۱-در شکل روبرو ارتفاع نظیر انرژی پمپ (Hp) را محاسبه کنید. دبی جریان آب در لوله ها ۲۷ lit/s است و از کلیه تلفات صرف نظر شود.

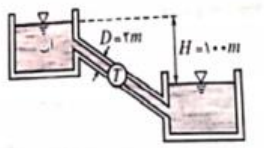


$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{۰/۰۲۷}{(\frac{\pi \times ۰/۰۶^۲}{۴})} = ۱۰\ m/s$$

$$V_۲ = \frac{Q}{A_۲} = \frac{۰/۰۲۷}{(\frac{\pi \times ۰/۰۳^۲}{۴})} = ۴۰\ m/s$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + Hp = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} \longrightarrow \frac{۱۲۰}{۱۰} + \frac{۱۰^۲}{۲\times۱۰} + H_P = \frac{۴۰۰}{۱۰} + \frac{۴۰^۲}{۲\times۱۰} \Rightarrow H_P = ۱۰۳\ m$$

تمرین ۲- در شکل مقابل تلفات سیستم به استثنای توربین، به صورت $۲.۷\frac{V^2}{2g}$ بیان می شود و راندمان توربین ۹۰ درصد است. توربین با سرعت ۲۴۰ rpm دوران می کند. برای ایجاد توان ۸۱۰ kw معادله دبی را تعیین کنید. گشتاور روی محور توربین چقدر است؟



$$N_a = N_u.\eta_T = \gamma Q H_T \eta_T \longrightarrow 810 \times 10^3 = 10000 Q H_T \times 0.9 \longrightarrow H_T = \frac{90}{Q}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{(\frac{\pi \times ۳^۲}{۴})} = \frac{Q}{۳} \Rightarrow \Delta H_{(۱-۲)} = ۲/۷ \times \frac{(\frac{Q}{۳})^۲}{۲\times۱۰} = ۱۵\times۱۰^{-۳} Q^۲$$

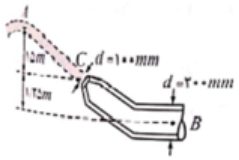
$$H_T = \Delta z - \Delta H_{(۱-۲)} \Rightarrow \frac{۹۰}{Q} = ۱۰۰ - ۰/۰۱۵ Q^۲ \Rightarrow ۰/۰۱۵Q^۳ - ۱۰۰Q + ۹۰ = ۰$$

برای تعیین گشتاورتوربین داریم:

$$N = F.V \Rightarrow N = F.(r\omega) \Rightarrow N = (Fr).\omega \Rightarrow N = T.\omega$$

$$۸۱۰ = T \times (۲۴۰ \times \frac{\pi}{۳۰}) \Rightarrow T = ۳۳/۷۵\ kN.m$$

تمرین ۳- در شکل روبرو سرعت در نقطه A، ۱۰m/s است. اگر از اصطکاک صرف نظر کنیم، فشار در نقطه B چقدر است؟



با نوشتن معادله پیوستگی جریان داریم:

$$V_B = \left(\frac{dc}{dB}\right)^2 Vc \longrightarrow VB = \left(\frac{100}{200}\right)^2 Vc \longrightarrow VB = \frac{1}{4}Vc$$

معادله برنولی را بین A و C:

$$Z_A + \frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} = Z_C + \frac{V_C^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma}$$

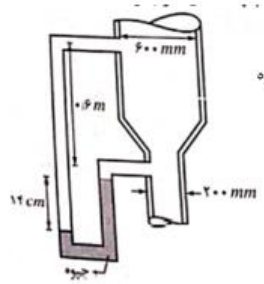
$$16.25 + 0 + \frac{10^2}{20} = 1.25 + 0 + \frac{V_C^2}{2g} \longrightarrow Vc = 20\frac{m}{s}\ , \quad VB = \frac{1}{4}Vc = \frac{1}{4}\times 20 = 5\frac{m}{s}$$

معادله برنولی بین B و C :

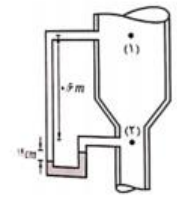
$$Z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} = Z_C + \frac{V_C^2}{2g} + \frac{P_C}{\gamma}$$

$$0 + \frac{P_B}{10} + \frac{5^2}{20} = 1.25 + 0 + \frac{20^2}{20} \longrightarrow P_B = 200\ kPa$$

تمرین ۴- روغن با چگالی نسبی S=0.9 در لوله قائم نشان داده شده در شکل مقابل به طرف پایین در حال حرکت است. اگر اختلاف ارتفاع جیوه در دو شاخه مانومتر جیوه ای ۱۴ سانتی متر باشد، آنگاه با فرض چگالی نسبی S=13.5 برای جیوه و صرف نظر کردن از کلیه تلفات، دبی حجمی موجود در سیستم چند لیتر بر ثانیه می باشد؟

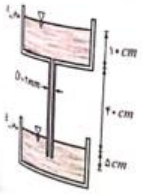


$$\begin{cases} \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \Delta H_f = \Delta h\left(\frac{\gamma_o}{\gamma} - 1\right) \\ V_2 = V_1\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 9V_1 \end{cases} \longrightarrow \frac{80V_1^2}{2\times 10} + 0 = 0.14\times\left(\frac{13.5}{0.9} - 1\right) \Rightarrow V_1 = 0.7\ m/s$$



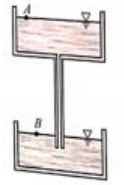
$$Q_1 = V_1 \times A_1 = (0.7)\left(\frac{\pi\times 0.6^2}{4}\right) = 0.063\pi = 0.189\ m^3/s = 189\ lit/s$$

تمرین ۵- مطابق شکل زیر آب از مخزن A به B در جریان است. اگر فقط ناشی از اصطکاک قابل توجه بوده و برای واحد طول لوله جریان این تلفات از رابطه $\Delta H = 0.1Q^2$ به دست بایید، توان تلف شده ناشی از جریان آب در لوله چقدر است؟



$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H_{AB}$$

$$0.5 + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0.45 \times 0.1 Q^2 \Rightarrow Q = \frac{10}{3}\ m^3/s$$



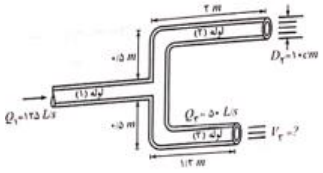
افت انرژی بین دو مخزن برابر است:

$$\Delta H_{AB} = \Delta Z = 0.4 + 0.1 = 0.5\ m$$

توان تلف شده برابر است با:

$$P = \gamma \Delta H Q = 10 \times 0.5 \times \frac{10}{3} = 16.67\ kw$$

تمرین ۶- در شکل زیر مشخصات مورد نیاز سیستم نشان داده شده است. افت انرژی در واحد طول کلیه لوله ها ۲.۷۵ است و لوله ها به صورت افقی قرار گرفته اند. سرعت سیال خروجی از لوله سوم (V_2) چقدر است؟



$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \longrightarrow Q_2 = 125 - 50 = 75\ lit/s$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{75 \times 10^{-3}}{\pi \times (0.05)^2} = \frac{30}{\pi} = 10\ m/s$$

نقطه ۱ را در ورودی لوله، نقطه ۲ در لوله شماره ۲ و نقطه ۳ در لوله شماره ۳ در نظر گرفته شده است:

معادله برنولی بین ۱ و ۲ :

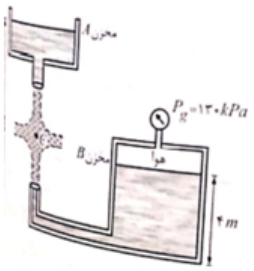
$$Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + \Delta H(1-2) \longrightarrow \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + 0 = 0 + \frac{10^2}{2 \times 10} + 0 + 2.75(L_1 + 2.5)$$

معادله برنولی بین ۱ و ۳ :

$$Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} \Delta H(1-3) \longrightarrow \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + 0 = 0 + \frac{V_3^2}{2 \times 10} + 0 + 2.75(L_1 + 1.7)$$

با مقایسه دو رابطه داریم:

$$\frac{V_3^2}{20} + 2.75(L_1 + 1.7) = 5 + 2.75(L_1 + 2.5) \Rightarrow V_3 = 12\ m/s$$



تمرین ۷- دو جریان آب مطابق شکل زیر از مخازن A و B به یکدیگر برخورد می کنند و در نقطه C سرعت جریان صفر می شود. (نقطه C نقطه سکون است). با صرف نظر کردن از کلیه تلفات، ارتفاع h را محاسبه کنید.

با استفاده از رابطه توریچلی داریم:

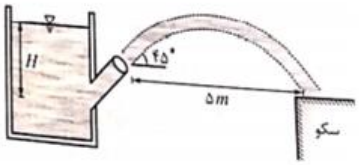
$$V_{CA} = \sqrt{2gh}$$

ابتدا سطح گذرنده از کف مخزن B را به عنوان سطح مبنا در نظر می گیریم، در آنصورت رابطه برنولی را برای مخزن B و نقطه C می نویسیم:

$$z_C + \frac{P_C}{\gamma} + \frac{V_{CB}^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} \Rightarrow ۵+۰+\frac{V_{CB}^2}{۲\times۱۰} = ۴+\frac{۱۳۰}{۱۰}+۰ \Rightarrow V_{CB} = \sqrt{۲۴۰}\ m/s$$

از انجایی که سرعت جریان در نقطه C صفر می شود، بنابراین می بایست: $V_{CA} = V_{CB}$ و مختلف الجهت باشند.

$$V_{CA} = V_{CB} \Rightarrow \sqrt{۲gh} = \sqrt{۲۴۰} \Rightarrow ۲\times۱۰\times h = ۲۴۰ \Rightarrow h = ۱۲\ m$$



تمرین ۸- دو مخزن نشان داده شده در شکل، مقدار H چقدر باشد تا آب در فاصله ۵ متری از جت آزاد بر روی سکوی مقابل ریخته شود؟ (مخزن را بزرگ در نظر بگیرید و از تلفات صرف نظر کنید)

معادله مسیر حرکت را می نویسیم:

$$y = \frac{-g x^2}{۲V_۰^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha$$

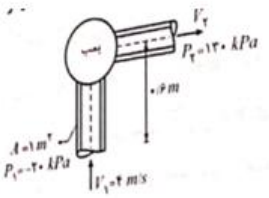
به ازای y=0 برد پرتابه برابر است با:

$$۰ = \frac{-gR^2}{۲V_۰^2\cos^2\alpha} + R\tan\alpha \Rightarrow R = \frac{V_۰^2 \sin ۲\alpha}{g}$$

با توجه به سرعت جت خروجی از روزنه که برابر $V_0 = \sqrt{2gH}$ می باشد داریم:

$$۵ = \frac{(۲gH)\times\sin ۹۰^\circ}{g} \Rightarrow H = ۲/۵\ m$$

تمرین ۹- مطابق شکل زیر آب با سرعت 4 m/s توسط لوله ای وارد پمپ می شود. فشار نسبی در مقاطع ۱ و۲ به ترتیب برابر ۲۰- kpa و ۱۳۰ kpa می باشد و سطح مقطع لوله خروجی از آن است. اگر مساحت مقطع لوله ورودی به پمپ 1 m2 باشد، توان هیدرولیکی پمپ را بر حسب کیلو وات تعیین کنید.(از کلیه تلفات صرف نظر کنید)



با استفاده از رابطه پیوستگی داریم:

$$A_1V_1=A_2V_2 \Rightarrow 1\times4=0.5\times V_2 \Rightarrow V_2=8\ m/s$$

حال با استفاده از رابطه برنولی بین دو مقطع داریم:

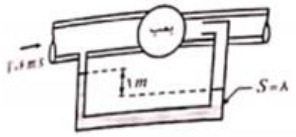
$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+H_P=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\Delta H_{(1-2)}$$

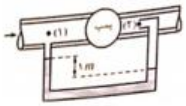
$$\Rightarrow -\frac{20}{10}+\frac{4^2}{2\times10}+0+H_P=\frac{130}{10}+\frac{8^2}{2\times10}+0.6+0 \Rightarrow H_P=18\ m$$

توان پمپ :

$$N_u=\gamma Q H_P=(10)(4\times1)(18)=720\ kW$$

تمرین ۱۰- در شکل مقابل پمپ توان ۲.۶ کیلووات را به آب اعمال می کند. دبی جریان چند لیتر برثانیه است؟ (از تلفات صرف نظر کنید)





ابتدا ارتفاع نظیر انرژی پمپ را محاسبه می کنیم:

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1+H_P=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+\Delta H$$

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{6^2}{2g}+0+H_P=\frac{P_2}{\gamma}+0+0+0 \Rightarrow \frac{P_2-P_1}{\gamma}=H_P+\frac{6^2}{2g}$$

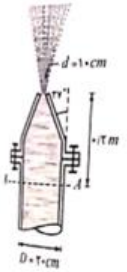
با استفاده از معادله مانومتری داریم:

$$\frac{P_2-P_1}{\gamma}=\left(\frac{\gamma_0}{\gamma}-1\right)\Delta h=(8-1)\times1=7\ m$$

$$7=H_P+\frac{6^2}{2\times10} \Rightarrow H_P=5.2\ m$$

$$N_u=\gamma H_P Q \Rightarrow 2.6=10\times5.2\times Q \Rightarrow Q=0.05\ m^3/s=50\ lit/s$$

تمرین ۱۱- آب خارج شده از نازل شکل مقابل به قطر ۱۰cm، تا ارتفاع ۹.۸ m بالا می رود. اگر تلفات خروج آب از نازل برابر ۶۴ Nm/kg باشد و از تلفات داخل لوله و نازل صرف نظر شود، مقدار فشار در مقطع A-A چقدر است؟

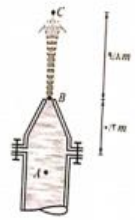


ابتدا معادله برنولی را بین نقطه B (مقطع خروجی نازل) و نقطه اوج فواره (نقطه C) می نویسیم:

$$\frac{P_B}{\gamma}+z_B+\frac{V_B^2}{2g}=\frac{P_C}{\gamma}+z_C+\frac{V_C^2}{2g}+\Delta H$$

$$0+0+\frac{V_B^2}{2g}=0+9/8+0+\frac{64}{10}\Rightarrow\frac{V_B^2}{20}=16/2\Rightarrow V_B=18\ m/s$$

با استفاده از رابطه پیوستگی داریم:



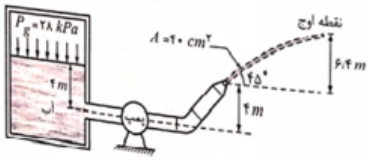
$$V_A=\left(\frac{D_B}{D_A}\right)^2V_B=\left(\frac{10}{30}\right)^2\times18=2\ m/s$$

حال با نوشتن رابطه برنولی بین A و B داریم:

$$\frac{P_A}{\gamma}+z_A+\frac{V_A^2}{2g}=\frac{P_B}{\gamma}+z_B+\frac{V_B^2}{2g}$$

$$\frac{P_A}{10}+0+\frac{2^2}{2\times10}=0+0/2+\frac{18^2}{2\times10}\Rightarrow P_A=162\ kPa$$

تمرین ۱۲- سطح آزاد در مخزن بزرگ تحت فشار نسبی ۲۸ kpa قرار دارد. آب به داخل لوله پمپ شده و سپس به صورت جت آزاد از یک نازل خارج می شود. توان هیدرولیکی پمپ به ازای اطلاعات داده شده چقدر است؟ (از تلفات صرف نظر شود).



در حل این مساله نقطه ۱ را روی سطح آزاد آب مخزن، نقطه ۲ را در دهانه خروجی نازل و نقطه ۳ را در مقطعی از جت آزاد که در ارتفاع ۶.۴ متری قرار دارد انتخاب می کنیم.

سطح افقی گذرنده از پمپ را به عنوان سطح مبنا در نظر می گیریم.

معادله برنولی را می نویسیم:

معادله برنولی بین ۱ و ۲:

$$Z_1+\frac{V_1^2}{2g}+\frac{P_1}{\gamma}+Hp=Z_2+\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}+\Delta H$$

$$\frac{28}{10}+4+0+Hp=0+4+\frac{V^2}{2g}+0\longrightarrow\frac{V^2}{2g}=2.8+Hp$$

معادله برنولی بین ۲ و ۳:

$$Z_2+\frac{V_2^2}{2g}+\frac{P_2}{\gamma}=Z_3+\frac{V_3^2}{2g}+\frac{P_3}{\gamma}\qquad I$$

$$0 + 0 + \frac{V^2}{2g} = 0 + 6.4 + \frac{(V\cos 45)^2}{2g} \longrightarrow \frac{V^2}{2g} = 128 \longrightarrow V = 16\ \frac{m}{s} \quad \text{II}$$

با استفاده از I و II :

$$12.8 = 2.8 + Hp \longrightarrow Hp = 10\ m$$

$$N_u = \gamma QHp = 10(16 \times 40 \times 10^{-4})(10) = 6.4\ kw$$

توجه : بردار سرعت در هر نقطه، بر مسیر حرکت سیال منطبق است و در نقطه اوج فقط مولفه افقی دارد که برابر است با :

$$V_X = V_0 \cos\alpha$$